



PROJECT

f-domain에서의 natural frequency 조작을 통한 내진설계

제출일자	2023년 05월 03일
과 목 명	진동 및 방진시스템설계
분 반	2분반
대 학	공과대학
학 과	기계시스템디자인공학과
학 번	B917079
이 름	양정현

1. 서론(배경 정보)

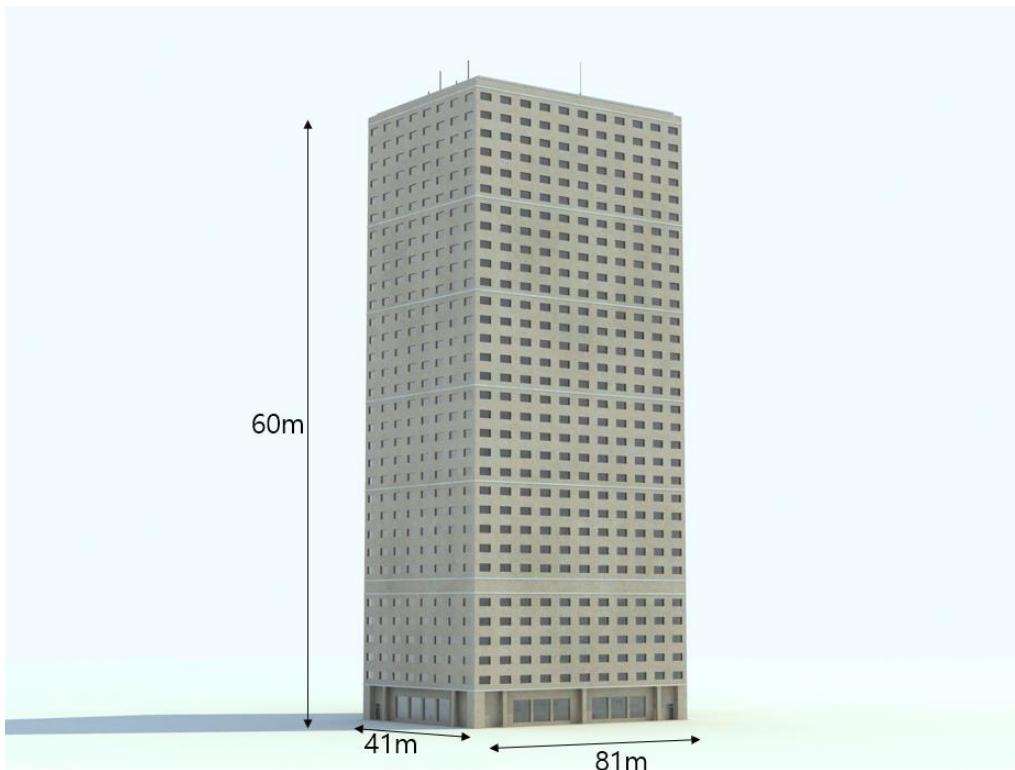
가. 지진 설정

2023년 2월 6일 01:17분 터키에서 pazarcik에서 발생한 MW 7.7의 지진을 기준으로 설정하고자 한다. 이 지진은 판과 판 사이가 위아래로 맞물리며 들어가는 형태가 아닌 두 판이 수평 방향으로 엇갈리며 발생한 지진으로 지표면과 평행한 방향으로 큰 진동이 발생하였으며, 판의 경계 부근에 많은 사람들이 거주하고 있어 피해 규모가 커졌다.

또한 지진에 의해 발생되는 많은 물리적 특성들은 관측소 내의 지진계로부터 측정되는데 이중 판의 경계에 가장 근접하고 지진에 의해 가장 영향을 많이 받은 지역 근처의 관측소(code: 4614)에서 측정된 데이터를 기준으로 외력을 설정하고자 한다.

나. 빌딩 모델링

빌딩은 서울시 강남구 역삼동에 위치한 한국타이어 빌딩을 모티브로 하였다. 빌딩의 가로길이는 80m, 세로 길이는 40m, 높이는 60m, 벽의 두께는 0.5m, 슬라브의 두께는 0.5m, 한 층의 높이(층고)는 2.5m로 설정하였다.



또한 건물의 외벽은 철근콘크리트로 이루어져 있고, 철근-콘크리트는 2:98 의 체적 배합비로 구성되어 있다고 설정하였다. 체적비 2:98 철근콘크리트의 밀도는 $2450kg/m^3$ 이며, 각층의 무게(외벽+슬라브)는

$$81m * 41m * 0.5m + 2.5m \times (80m \times 0.5m \times 2 + 41m \times 0.5m \times 2) \times \frac{2450kg}{m^3} = 4,809,350kg$$

약 4800t 으로 볼 수 있다.

표 1 참조. 콘크리트의 탄성계수 E_c (MPa) 산정식

$m_c = 1,450 \sim 2,500 \text{ kg/m}^3$	$E_c = 0.077 m_c^{1.5} \sqrt[3]{f_{cu}}$
$m_c = 2,300 \text{ kg/m}^3$ 일 경우	$E_c = 8,500 \sqrt[3]{f_{cu}}$

• m_c : 콘크리트의 단위질량

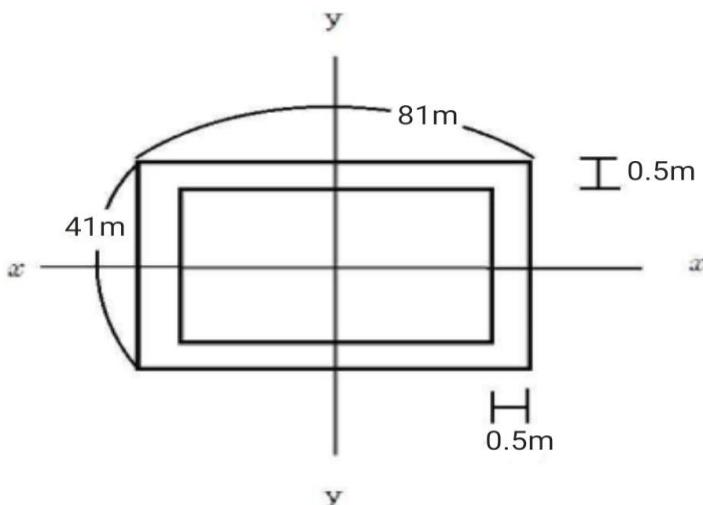
• $f_{cu} = f_{ck} + \Delta f$ (MPa)

Δf 는 f_{ck} 가 40MPa일 때 4MPa, 60MPa일 때 6MPa, 그 사이는 직선보간

여기서 f_{ck} 는 24MPa로 가정하였고, $E_c = 8500 \sqrt[3]{f_{cu}} \approx 27GPa$ 이다. 철근의 탄성계수 E는 200GPa이고, 체적비 2:98의 철근콘크리트의 탄성계수 E는 $0.02 \times 200GPa + 0.98 \times 27GPa = 30.5GPa$ 로 설정할 수 있다.

다음은 외벽의 2차단면모멘트를 계산한다.

건물의 평면도는 다음과 같다.



$$x-x \text{ 축의 } 2 \text{ 차 단면모멘트} : I_{xx} = \frac{1}{12}((81 \times 41^3) - (80 \times 40^3)) = 38550m^4$$

$$y-y \text{ 축의 } 2 \text{ 차 단면모멘트} : I_{yy} = \frac{1}{12}((41 \times 81^3) - (40 \times 80^3)) = 109090m^4$$

$I_{xx} < I_{yy}$ 이므로 $I = I_{xx} = 38550m^4$ 으로 설정한다.

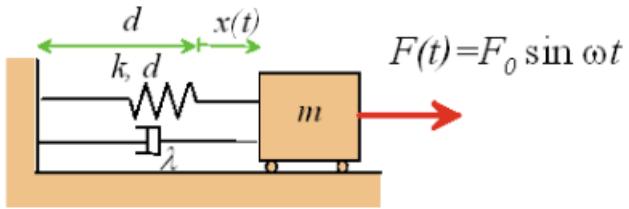
따라서 건물 1층의 스프링강성은 다음과 같이 계산된다.

$$k = \frac{3EI}{L^3} = \frac{3 \times 30.5 \times 10^9 \times 38550}{2.5^3} = 2.257E + 14 N/m$$

2. 이론

가. 모델링 및 외력 설정

지진에 의한 빌딩의 거동을 1자유도 감쇠 시스템에서의 강제응답으로 가정하면 다음과 같다.



이때 $f(t)$ 는 외력, 즉 지진이 지표면과 평행한 방향으로 가하는 가진력이고, k, c 는 각각 스프링 강성, 감쇠계수이다. 이 진동시스템의 운동방정식은 다음과 같다.

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = F_0 \sin(\omega_e t)$$

유효질량 및 전체 스프링강성을 계산한다. 가진력이 중력방향과 수직으로 작용하므로 진동계의 유효질량은 건물 전체의 질량과 다를 것으로 예상된다.

에너지법을 통해 유효질량과 고유진동수를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} T_{\max} &= \frac{1}{2} \cdot \int_0^L \frac{m}{L} \left(\frac{x^3}{L^3} \dot{x} \right)^2 dx + \sum_{n=1}^{15} \cdot \frac{1}{2} \cdot M \cdot \left(\frac{n^3}{15^3} \dot{x} \right)^2 \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{M_{\text{외벽}}}{7} \cdot w_n^2 \cdot A^2 + \frac{1}{2} \cdot M_{\text{슬라브}} \cdot \frac{14400}{3375} \cdot w_n^2 A^2 \\ U_{\max} &= \frac{1}{2} \cdot k_{\text{tot}} \cdot A^2 \\ \therefore w_n &= \sqrt{\frac{k_{\text{tot}}}{\frac{M_{\text{외벽}}}{7} + \frac{14400}{3375} \cdot M_{\text{슬라브}}}} \\ M_{\text{eff}} &= 19077806 \text{ kg} \end{aligned}$$

빌딩 하부와 빌딩 상부는 L^3 에 비례하여 속도가 증가한다고 가정하면, 유효질량과 고유진동수를 구할 수 있다.

$$\text{결과 } w_n = \sqrt{\frac{k_{\text{tot}}}{\frac{m_{\text{outer_wall}}}{7} + \frac{14400 \times m_{\text{slab}}}{3375}}} \text{ 의 결과를 얻을 수 있다.}$$

건물 전체 유효질량 $m_{\text{eff}} = 19077806 \text{ kg}$ 이다.

w_n 을 계산하기 위하여 k_{tot} 을 구하여 본다.

층과 층 사이의 스프링(외벽)은 직렬로 연결되어 있다고 가정할 수 있고, 각 n층마다의 스프링 상수는 1층에서 n층까지의 높이 L이 바뀌는 형식이므로 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$k_2 = \frac{3EI}{L_2^3} = k_1 \times \frac{L_1^3}{L_2^3}, \quad k_3 = \frac{3EI}{L_3^3} = k_1 \times \frac{L_1^3}{L_3^3} \dots k_{15} = \frac{3EI}{L_{15}^3} = k_{14} \times \frac{L_1^3}{L_{15}^3}$$

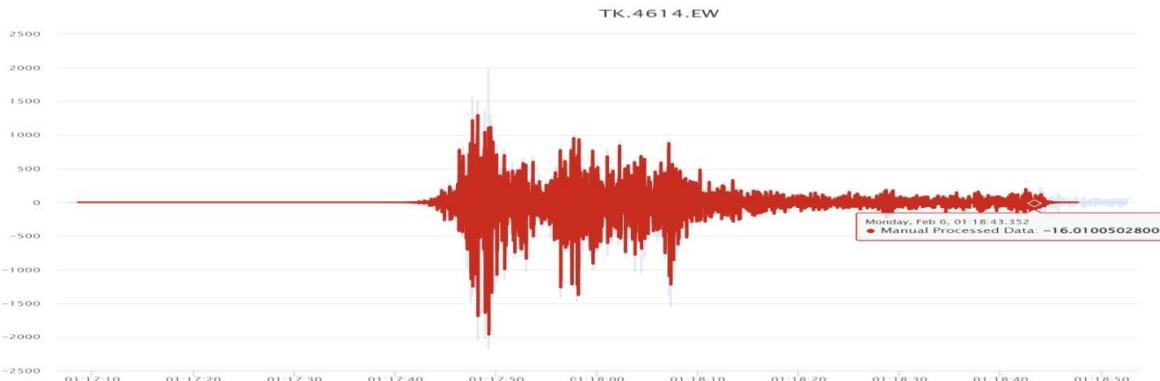
이를 엑셀을 활용하여 계산하면 다음과 같은 결과를 얻을 수 있다.

	k1	k2	k3	k5	k10										k20				
증수	2.26E+14				1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
높이비		1	8	27	64	125	216	343	512	729	1000	1331	1728	2197	2744	3375	4096	4913	5832
각 증의K	2.26E+14	2.82E+13	8.36E+12	3.53E+12	1.81E+12	1.05E+12	6.58E+11	4.41E+11	3.10E+11	2.26E+11	1.70E+11	1.31E+11	1.03E+11	8.23E+10	6.69E+10	5.51E+10	4.59E+10	3.87E+10	3.29E+10
각 증의 1/K	4.43E-15	3.54E-14	1.20E-13	2.84E-13	5.54E-13	9.57E-13	1.52E-12	2.27E-12	3.23E-12	4.43E-12	5.90E-12	7.65E-12	9.73E-12	1.22E-11	1.50E-11	1.81E-11	2.18E-11	2.58E-11	3.04E-11
k tot'	5.12E+09																		

$$k_{tot} = 5.12 \times 10^9 N/m \text{이며, 따라서 건물의 고유진동수는 } w_n = 16 \frac{rad}{s} = 2.61Hz \text{이다.}$$

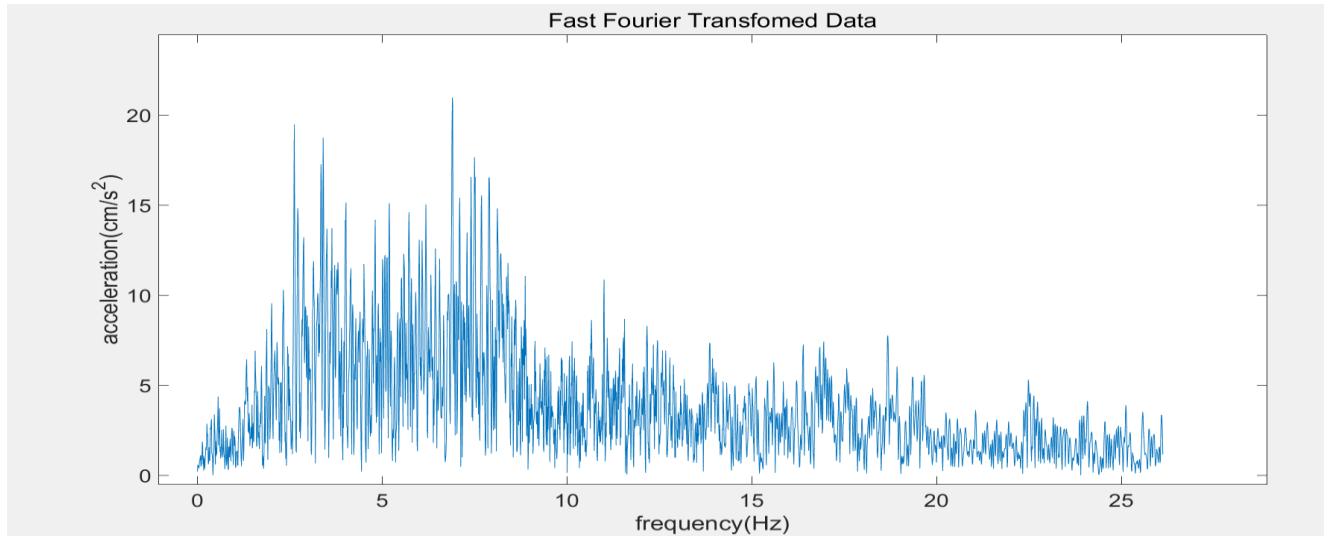
나. 외력 모델링

지진은 지하에서 지표면 아래에서 발생한 지진파가 지표면까지 전달되어 나타나는 현상이다. 이러한 지진파는 운동량 보존 법칙에 따라 지표면에서의 가속도로 변환된다. 또한 가속도 측정은 다른 물리량의 측정 방법에 비해 상대적으로 간단하고 비교적 정확한 데이터를 추출할 수 있다. 따라서 이번 터키지진의 분석에 가속도-시간이력 그래프를 활용할 것이며, 이를 t-domain 관점에서 분석하는 것이 아닌 Fourier transform을 통해 f-domain에서의 가속도 데이터를 분석할 것이다. f-domain에서의 지진파 분석은 다양한 지진파(p파, s파, 표면파)들은 도달시간이 다르지만 이를 주파수 영역에서 분석하면 다양한 지진파들의 특성을 특별히 고려해 주지 않아도 되는 장점이 있다고 생각하였다. 시간-가속도 데이터는 여러 관측소 중 가장 큰 PGA(Peak Ground Acceleration)를 기록한 진원지 부근의 관측소(4614)를 설정하였으며 E-W, N-S 데이터 중 더 큰 기록을 측정한 E-W 데이터를 활용하기로 하였다. 4614 관측소에서 측정한 터키지진의 시간-가속도 이력 그래프는 다음과 같다.



이때 세로축은 가속도(cm/s^2)이며 가로축은 시간(s)이다.

위의 시간-가속도 그래프에서 1st order Butter worth filter를 사용하여 추출한 데이터를 FFT(Fast Fourier Transform)을 적용하여 Matlab에서 Plot하면 다음과 같다.



이제 고속 푸리에변환 처리된 DATA들을 활용하여 $F(t)$ 를 설정해 주어야 한다.

1- 자유도 감쇠시스템의 강제응답에 대한 운동방정식을 다시 표현하면

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = F_0 \sin(\omega_e t)$$

$$\ddot{x}(t) + 2\zeta\omega_n\dot{x}(t) + \omega_n^2x(t) = f_0 \sin(\omega_e t), \quad f_0 = \frac{F_0}{m} = a_e, \zeta = \frac{c}{2\sqrt{km}},$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

이고, 이때의 Particular solution은 다음과 같다.

$$x(t) = X \sin(\omega_e t - \theta)$$

$$X = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega_e^2)^2 + (2\zeta\omega_n\omega_e)^2}}, \quad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{2\zeta\omega_n\omega_e}{\omega_n^2 - \omega_e^2}\right)$$

전체 해는 $X(t) = X_h + X_p$ 이지만, 건물의 초기조건 $X_0 = 0, V_0 = 0$ 을 대입하면 homogeneous Solution은 사라지고 $X(t) = X_p(t)$ 가 된다.

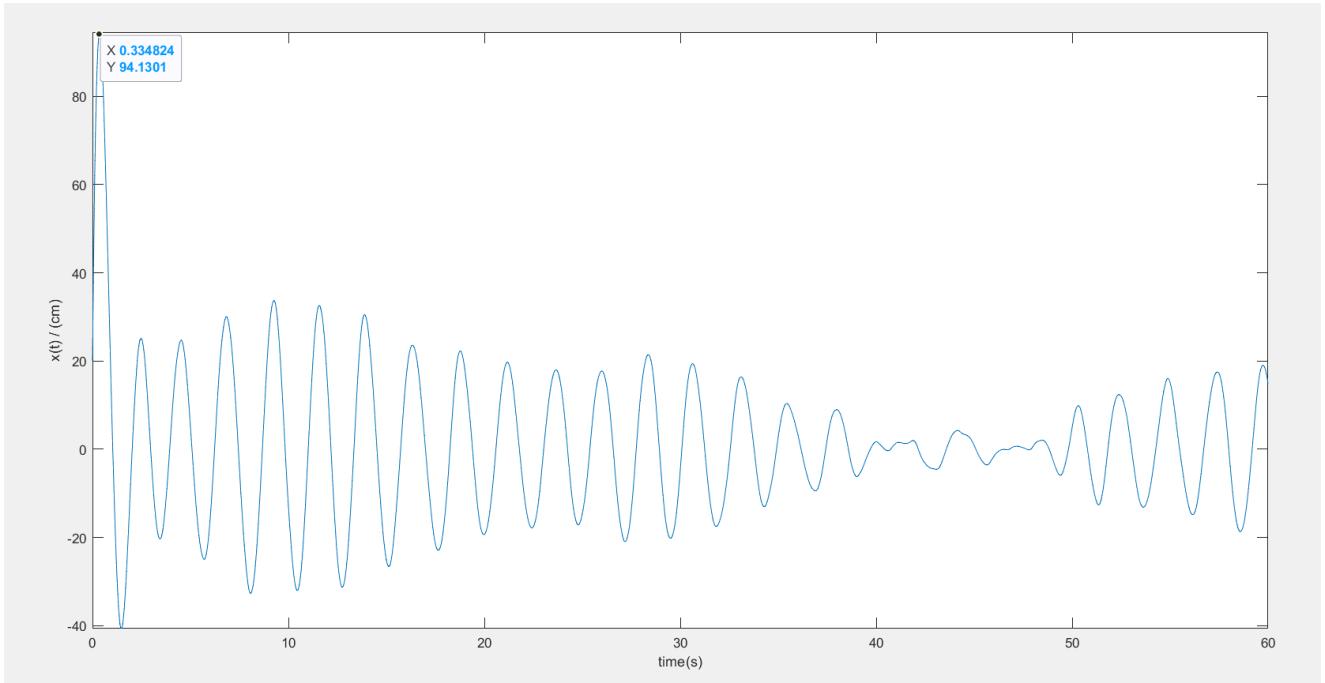
운동방정식이 2차 상미분방정식의 형태이므로 각각의 가진력에 대해 중첩이 가능하다는 사실을 활용하여, 고속 푸리에 변환을 통해 처리된 DATA들을(가속도-주파수) 행렬로 표현하여 X, θ 값을 구한 뒤, f-domain상의 모든 주파수에 대한 가속도 값에 대한 과도응답 $x(t)$ 를 구해보기로 한다. 진파의 가속도 형태는 Sin 함수와 유사하여 $F(f)$ 를 Sin 함수로 표현하였고 Sin에 대한 응답을 구하였다. ζ 는 건물의 기본 감쇠비를 가정하여 0.05를 사용하였다($\zeta = 31,253,538 N \cdot s/m$). $x(t)$ 는 유효 질량의 계산을 통해 건물 꼭대기에서의 좌표를 기준으로 진동하는 응답임을 알 수 있다. 이때의 반복 계산을 원활히 하기 위하여 매트랩을 사용하였으며 사용한 코드는 다음과 같다.

```

+12 Project.m ewspe.m spec_acc_fourier_8.m untitled40.m createFit.m s
1 % 주어진 데이터 값
2 a; % 진폭(X)
3 w; % 각진동수(We [0~26HZ], Sampling 크기 :0.001Hz)
4 r; % 위상각 theta
5 n = length(a); % 데이터의 개수
6
7 % 1부터 n까지 x값을 더하는 변수 초기화
8 sum_x = 0;
9
10 % 주어진 식에 따라 각각의 x값 계산
11 for i = 1:n
12     t = i; % 시간 t는 i로 설정
13     x_i = a(i)*sin(w(i)*t-r(i)); % 주어진 식에 따라 x_i 계산
14     sum_x = sum_x + x_i; % 계산된 x_i 값을 sum_x에 더함
15 end
16
17 % 결과 출력
18 fprintf('1부터 %d까지 x값의 합: %f\n', n, sum_x);

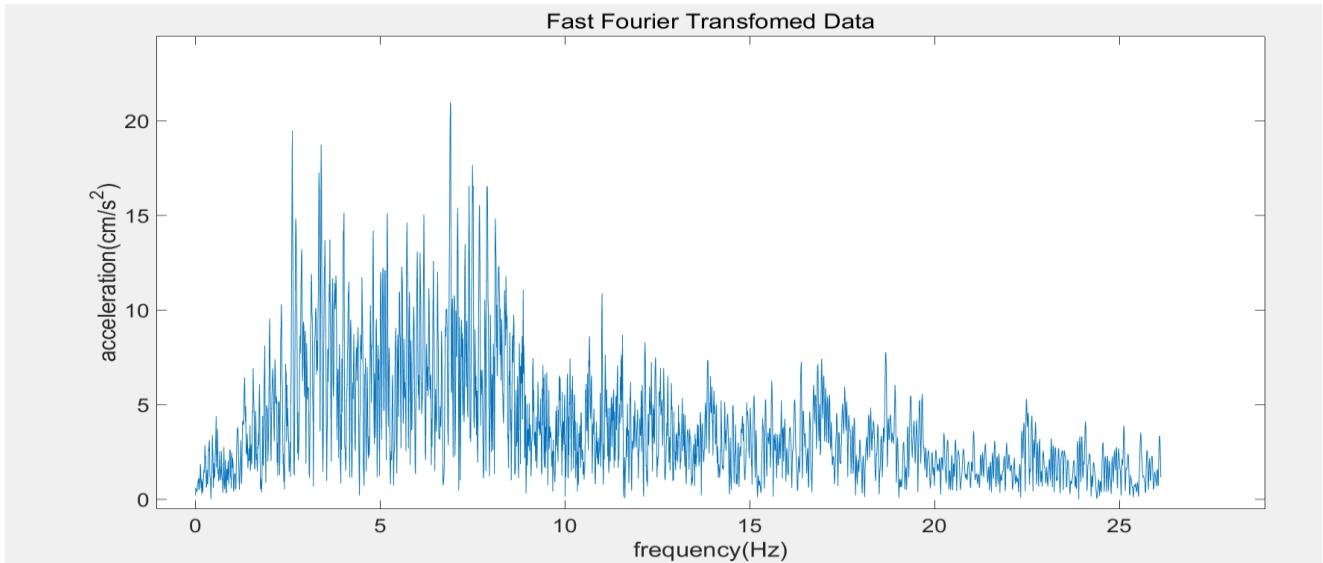
```

이때의 응답 $x(t)$ 는 2744개 항이 중첩된 매우 복잡하고 긴 해(solution) 이므로 응답을 plot 하였고 다음과 같다.

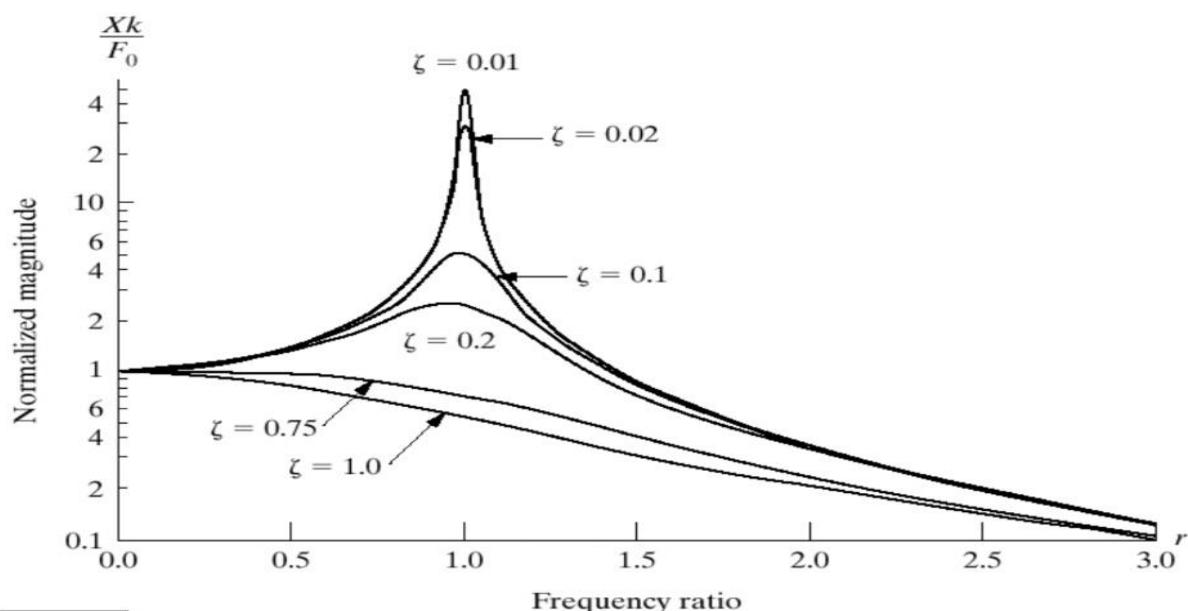


터키지진의 주요 유효 지속시간은 약 60s로 알려져 있으며 따라서 지진파 도달 후 60초간의 건물의 최대 변형은 **94cm**로 측정된다. 따라서 건물의 진동 폭을 50% 저감하기 위해서는 **47cm**이하가 되어야 한다.

3. 설계 방안



f-domain 상에서의 가속도 값을 관찰하면 내진설계 적용 전의 건물의 고유주파수(2.61Hz) 부근에 최대 가속도 값을 가진 지진파 성분들이 위치해 있는 것을 확인할 수 있다. 건물의 비 감쇠 고유주파수와 구동주파수(지진의 주파수)가 일치하거나, 접근할 때 건물은 최대 진폭을 가지며 진동하고, 위상차는 $\frac{\pi}{2}$ 를 통과하므로 빌딩의 속도와 가진력이 크기만 다르고 같은 위상임을 의미한다. 따라서 건물의 고유주파수와 지진의 최대가속도 성분들이 위치한 주파수 영역대가 일치하거나 비슷하면, 감쇠비를 조정하여 공진 영역 근처에서 최대 변위값을 낮추는 방법이 효과적이며, 감쇠비를 조정하지 않고 건물의 질량, 스프링 강성을 조작하여 최대가속도 성분이 위치한 주파수 영역 밖으로 건물의 고유진동수를 조작하는 방법도 생각해 볼 수 있다.



위의 주파수비, 무차원 진폭 선도를 참고하여 건물의 최대진폭을 저감하는 방법을 생각해 본다.

우선 주파수-가속도 그래프에서 건물의 고유 주파수와 유사한(2.61Hz) 외력, 즉 F/m 가장 큰 영향을 미칠 것으로 예상된다. 따라서 2,744개의 외력 중에 2.61Hz의 구동주파수를 가지는 외력만 작용한다고 가정하고 주파수-무차원 진폭 선도를 이용하여 진동 저감 방안을 설계해 보기로 한다. 현재 빌딩의 감쇠비는 0.05이고, $r \approx 1$, ($r = \frac{\omega_e}{\omega_n}$)에 위치하므로 감쇠비를 조정하는 것이 효과적이라고 판단된다.

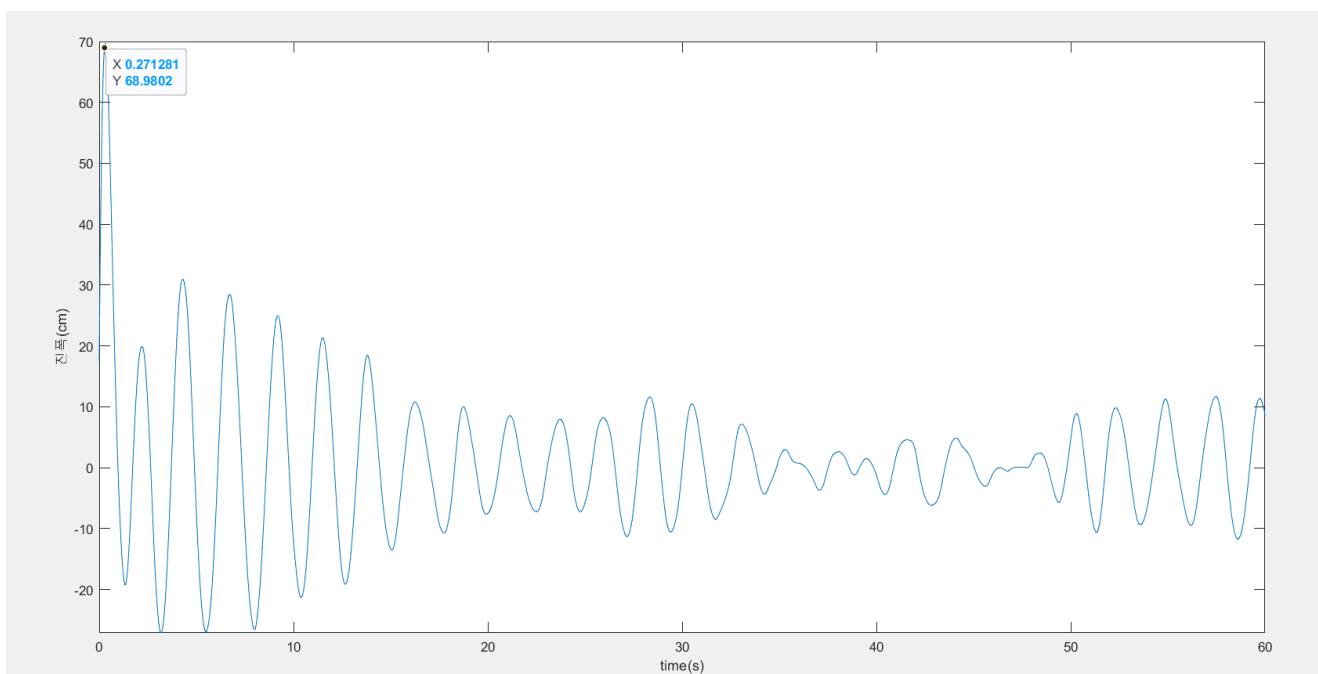
$$\frac{X\omega_n^2}{f_0} = \frac{1}{\sqrt{(1-\zeta^2)^2 + (2\zeta r)^2}}$$

$\Gamma = 1, \zeta = 0.05$ 일 때의 무차원 진폭 : $\frac{1}{\sqrt{(2 \cdot 0.05)^2}} = 10$

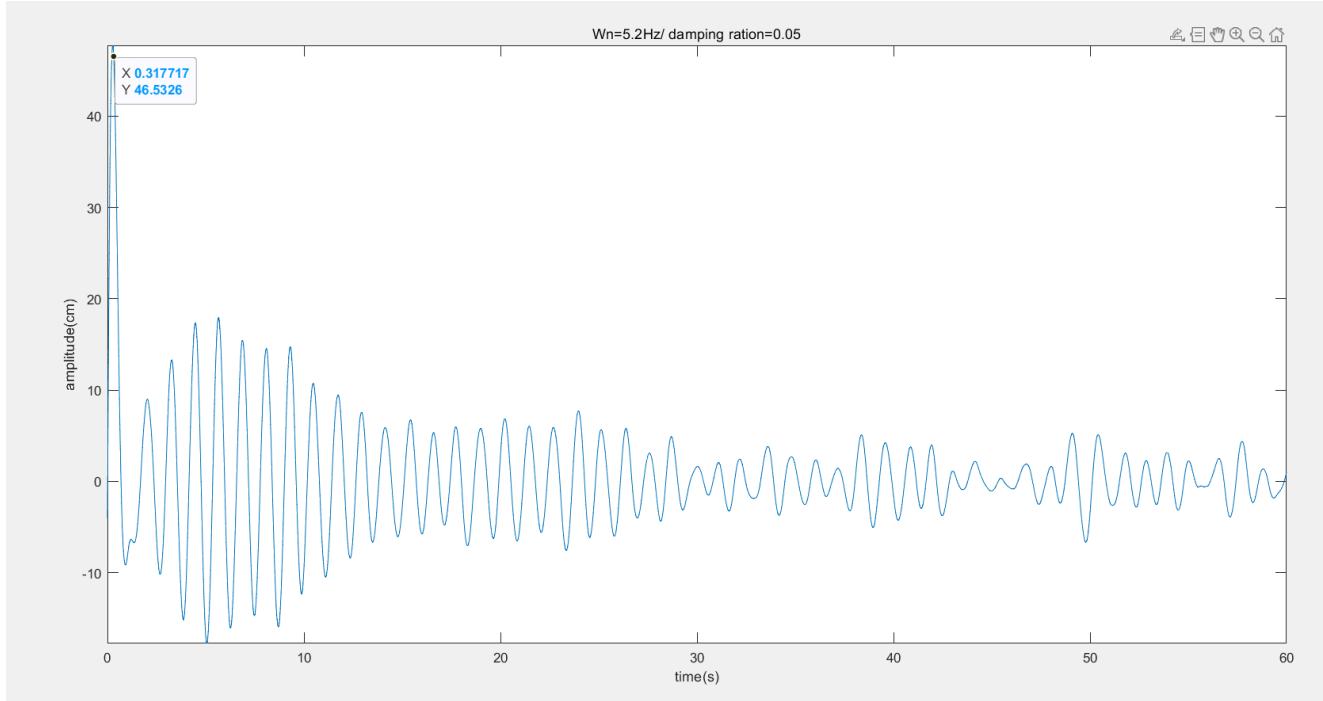
50% 이상 빌딩의 최대 진폭 저감 시 무차원진폭 < 5 이어야 한다.
일 때의 $\zeta = 0.1$ 이다.

$\zeta = 0.05, r \approx 1$ 일 때의 무차원 진폭은 10으로 계산된다. 공진 근처의 주파수 하나만 고려하였으므로 실제로는 10보다는 큰 값으로 예상되지만, 계산의 편이와 주파수비-무차원 진폭 선도의 효과적인 사용을 위해 하나의 주파수만 고려한 값이다. 이때 50% 이상 최대 진폭을 저감하려면 $\zeta > 0.1$ 일 때인 것을 알 수 있다.

Matlab을 활용하여 전체응답 $x(t)$ 를 다시 구하고 2,744개의 항을 plot 하면 다음과 같다.



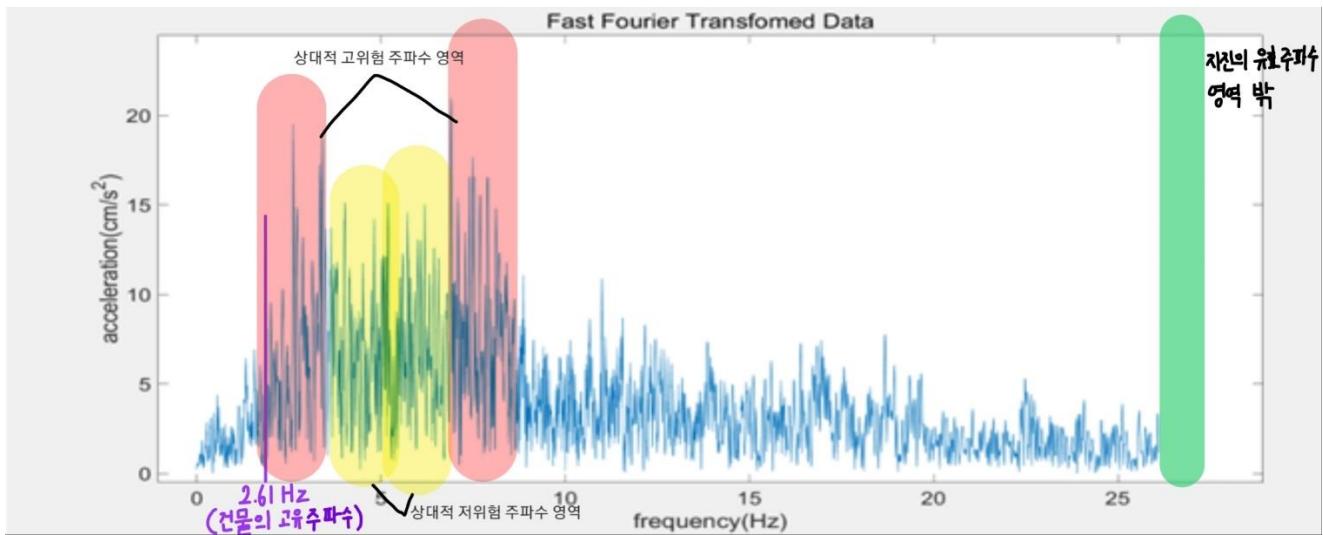
최대진폭은 **약 69cm**로 목표 **47cm**에는 도달하지 못하였다. 이는 지진을 단일 주파수만을 가진 외력으로 가정하고 감쇠비만 조절한 것이 이유라고 생각된다. 실제로는 여러 개의 주파수 성분들이 각기 다른 외력을 가지고 건물에 작용하므로 건물의 고유진동수 ω_n 혹은 고유주파수를 지진파의 상대적으로 큰 외력을 가지는 주파수 성분들의 범위 밖에 위치하도록 인위적 조작을 해보기로 한다. 건물의 고유주파수를 약 2배(5.2Hz)로 조작하고 그때의 최대변위를 살펴본다.



결과 최대변위는 **46.5cm**로 목표 변위였던 **47cm** 이하를 만족하는 결과를 얻어낼 수 있었다. 고유진동수를 2배로 증가시키려면 $k_{tot} = 4k'_{tot}$ 이어야 하고, 이때 지표면과 건물의 외벽에 병렬로 추가해야 할 k 값은 $3k_{tot}$ 이지만 스프링의 직렬이 아닌 병렬로 연결하여야 한다. 병렬연결은 건물 근처에 가벽을 추가로 설치해야 하므로 미관상 선호되지 않는 비현실적인 방법이라고 생각된다.

스프링 강성 k를 산출할 때의 식을 다시 상기하면 $k = \frac{3EI}{L^3}$ 이다. 따라서 고유진동수를 2배로 조작하기 위한 한층의 K값은 $9.04E+15 \text{ N/m}$ (기존 한 층의 K값의 4배) 가 되어야 한다. 하지만 L, I값은 주어진 건물의 조건이므로 외벽의 탄성계수 E를 철근-콘크리트의 체적 배합비를 바꾸거나 탄성계수가 높은 재료를 사용하여 건물의 외벽을 보강하여 층별의 K값을 키워주는 것이 합리적인 방법이라고 생각된다.

건물의 특성치(고유진동수) 등은 실험적 방법 등을 통해 측정 또는 예상할 수 있다고 생각된다. 그러나 앞으로 어떠한 지진이 발생하게 될지를 예측하는 것 불가능하다. 또한 앞으로 올 지진의 주파수-가속도 성분을 예측하기는 제한적이다.



방법 1) 감쇠비만 조작 $\omega_e \approx \omega_n$: c 값의 조작

첫째 건물에 가장 많은 영향을 미치는 지진의 주파수 영역대와 건물의 고유진동수가 일치할 때, 감쇠비를 증가시키는 방법이 효율적이라고 판단된다. 감쇠비를 증가시키는 방법은 감쇠계수 C의 값을 증가시키거나, m, k 값을 감소시킬 수 있다. 그러나 m과 k는 $1/2$ 제곱에 비례하여 감소하므로 감쇠계수 값을 조정해 주는 것이 가장 효과적이라고 판단된다.

방법 2) 고유진동수의 조작(증가) $\omega_e << \omega_n$: K값 조작

두번째 방법은 지진의 유효주파수 영역 밖에 건물의 고유진동수가 위치하도록 조작하는 방법이다. 위의 건물의 최대 진폭을 50% 이상 감소시킬 때 사용한 방법과 일치한다. 건물의 고유진동수를 증가시키는 방법은 스프링 강성 k를 키워주거나 건물의 총 유효질량 m을 감소시키는 두 가지 방법이 있다. 건물의 유효질량을 감소시키는 것은 건물의 유효질량을 증가시키는 방법보다는 비현실적인 측면이 있으므로 위의 최대변위를 50% 저감 시키는 방법처럼 빌딩과 가벽 사의의 스프링 설치 또는 외벽의 보강 및 재료변경을 통해 k_{tot} 값을 증가시키는 것이 가장 효과적이라고 판단된다.

방법 3) 고유진동수의 조작(감소) $\omega_e >> \omega_n$: m값 조작

세번째 방법은 빌딩의 고유진동수를 감소하는 쪽으로 조작하는 방법이다. 이때는 건물의 스프링 강성 k를 감소시키거나 유효질량 m을 키워주는 방법이 있다. 고유진동수를 증가시키는 것과 반대로 이미 지어진 건물의 k값을 감소시키는 것은 유효질량m을 키워주는 방법보다는 비현실적으로 생각된다. 이러한 상황에서는 건물에 추가적인 질량을 부여하여 ω_n 을 작아지는 방향으로 조작하여 지진의 최대 가속도를 갖는 주파수 영역 밖으로 벗어날 수 있다. 이 가정은 1 자유도로 가정했을 때는 타당하다고 생각되나, 실제 건물의 거동은 무수히 많은 다자유도 진동 시스템이고, 각각의 모드에 따른 ω_n 이 증가하는 형식으로 존재한다. 현실적 조건에서는 mode1의 고유진동수는 지진의 유효 주파수를 회피하더라도 두번째, 혹은 n번째 고유진동수가 지진의 주파수와 근접하여 진동계가 공진할 가능성도 고려해 주어야 한다는 제약조건이 존재한다.

건물 평수와 고유진동수와의 관계

건물의 평수(면적)가 늘어나면 슬라브의 무게가 늘어난다. 이는 유효질량 m 의 증가와 연결되고 ω_n 은 감소한다. 건물 평수의 증가는 $\omega_e >> \omega_n$ 인 상황에서 건물의 고유진동수를 낮추는 데 효과적으로 쓰일 것으로 판단된다.

4. 결론

지표면과 평행한 지진파를 푸리에 변환을 통해 각각을 가진력으로 표현하여 지진 외력을 모델링하였다. 지진파의 특정주파수 영역대의 가속도를 각진동수를 가진 여러 개의 사인 함수의 합으로 분해한 후, 각 사인 함수의 진폭과 위상을 가진력으로 해석하였다.

사용된 가정은 지진파가 사인 함수들의 합으로 분해될 수 있다는 것이며 또한, 지진파는 건축물의 질량과 강성 등을 고려하지 않고 단순 외부 입력으로만 간주하였다.

하지만 이 방법의 한계는 지진파를 각진동수 성분별로 분해할 때, 정확한 각진동수 별 가속도값을 설정하기 어렵다는 것이다. 이번 내진설계 프로젝트에서는 0.001Hz 단위로 샘플링한 데이터를 사용하였다. 무한히 작은 샘플링 간격으로 외력의 구동주파수를 설정하여 오차를 줄여나갈 수 있지만, 이는 계산 시간의 증가로 이어진다.

빌딩의 모델링 또한 작지 않은 규모의 빌딩을 기둥 없이 외벽만으로 사하중, 활하중 등을 지탱한다고 가정하였고 외벽을 수직보로만 가정하였다. 실제 빌딩에서는 더 많은 기둥을 활용하여 층과 층사이를 지탱할 것이며 지표면과 수직 방향인 지진파의 성분도 기둥의 좌굴 및 정적 처짐으로 인한 미세한 층고사이의 변화를 유발하여 수평방향의 변위에 추가적인 영향을 미칠 것으로 생각된다. 또한 건물의 최대변위 뿐만 아니라 건물에 가해지는 지속적인 외력은 피로파괴를 유발할 가능성도 존재한다. 따라서 실제 건물의 강성, 유효질량과 고유진동수는 이번 프로젝트에서 많은 가정을 통해 도출해 낸 결과와 달라, 실제 건물의 응답과는 오차가 발생할 것으로 예상된다.

지진파 분석을 통한 접근은 구조물의 내진설계의 접근법 중 하나일 수 있지만, 실제 건축물의 거동과 지진파 데이터값의 정확도를 고려해야 한다는 한계가 존재한다.

출처

<https://tadas.afad.gov.tr/event-detail/17966> - 지진파 데이터 자료

https://www.brown.edu/Departments/Engineering/Courses/En4/notes_old/Forcedvibes/Frcedvibes.html - 운동방정식 수식 이미지

[1 장 철근콘크리트구조의 일반사항 \(kocw.net\)](#) - 철근콘크리트의 탄성계수 설정

<https://free3d.com/3d-model/buildings-city-10-models-collection-9218.html> - 빌딩 이미지

참고자료